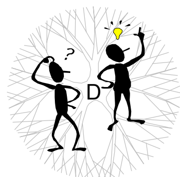
VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ



ФИЗИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ

ЧАСТЬ 1

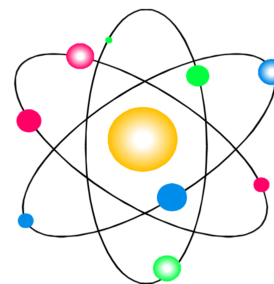
ФИЗИКА

Савчук В.П.

Обработка результатов измерений. Физическая лаборатория. Ч1: Учеб. пособие для студентов вузов. — Одесса: ОНПУ, 2002. — 54 с. ил.

В пособии рассмотрены вопросы практического применения статистической обработки результатов измерений, проводимых в учебной физической лаборатории. Представлено краткое теоретическое обоснование точечных и интервальных оценок измеряемой физической величины. Изложение дополнено примерами обработки конкретных данных. В приложениях приведены необходимые статистические таблицы.

Пособие рассчитано на студентов технических учебных заведений.



Результаты любого физического эксперимента необходимо уметь проанализировать. В физической лаборатории необходимо научиться не только измерять физические величины, но и проверять и находить связь между ними, сопоставлять результаты эксперимента с выводами теории.

1. ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Физическая величина — это характеристика одного из свойств физического объекта (системы, явления или процесса). Качественно одна и та же физическая величина может иметь различное количественное выражение. Количественная определенность физической величины, присущая конкретному материальному объекту, характеризуется ее размером. Значение физической величины представляет собой оценку размера этой величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц. Значение физической величины выражается произведением ее числового значения на выбранную для этой величины единицу. Числовое значение — это отвлеченное число. Единица физической величины — физическая величина, которой условно присвоено числовое значение, равное 1.

Пример: значение длины можно выразить как L = 0.202 м = 20.2 см = 202 мм. Следовательно, числовое значение физической величины с изменением размера единицы изменяется. Размер величины и ее значение при этом будут одними и теми же.

Различают **истинное** значение физической величины, идеально отражающее свойства материального объекта, и **действительное** — значение, найденное экспериментально.

Измерение физической величины заключается в сравнении измеряемой величины с её единицей, с целью получения значения этой величины в форме, наиболее удобной для использования. Измерение производится с помощью технических средств, хранящих единицу, или воспроизводящих шкалу физической величины.

Не следует отождествлять понятие **измерение** с понятием **наблюдение при измерении** — экспериментальной операцией, выполняемой в **процессе** измерения. Результат наблюдения — это одно значение (**отсчет)** измеряемой величины. Результат измерения получается после математической обработки всех отсчетов.

Измерением с однократными наблюдениями называется измерение, при котором каждый отсчет получен при различных значениях физических величин, связанных с измеряемой величиной.

Пример: измерение ускорения тел различной массы при действии на них фиксированной силы.

Измерением с многократными наблюдениями называется измерение, при котором все отсчеты получены при фиксированных значениях физических величин, связанных с измеряемой величиной.

Пример: измерение ускорения тела заданной массы при действии на него одной и той же силы при многократном повторении эксперимента.

Существует два основных вида измерений: **прямые** и **косвенные**.

Прямым измерением называется измерение физической величины, при котором ее значение находят непосредственно из опытных данных.

Примеры: измерение длины с помощью линейки; измерение сопротивления омметром.

Косвенным измерением называется измерение физической величины, при котором ее значение находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, значения которых получены прямыми измерениями.

Пример: определение сопротивления по напряжению и току, измеренным вольтметром и амперметром, соответственно.

Совместными называются такие измерения, при которых одновременно измеряют две и более неоднородные величины для нахождения зависимости между ними или определения параметров этой зависимости.

Пример: измерение тока при различных значениях напряжения для проверки закона Ома.

Моделью объекта измерения называется абстрактный, как правило, идеализированный образ реального объекта.

Примеры: материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальный газ, однородный проводник.

Метод измерений - это совокупность приемов сравнения измеряемой величины с её единицей. Метод измерений осуществляется в соответствии с моделью объекта измерения и доступным набором технических средств.

Истинной погрешностью измерения называется отклонение результата измерения физической величины (действительного значения) от ее истинного значения. При проведении измерений, как правило, истинное значение измеряемой величины неизвестно. Результатом измерения является **оценка** истинного значения, которая чаще всего с ним не совпадает. Принято, независимо от того, известно или неизвестно истинное значение, погрешность характеризовать, так называемым, **доверительным интервалом**, в котором с определенной степенью достоверности содержится истинное значение. Середина этого интервала совмещается с оценкой истинного значения (рис. 1).

Погрешность выражается в виде **абсолютной** и **относительной** погрешности.

Абсолютная погрешность равна модулю разности между оценкой и границей интервала**,** т.е. *полуширине доверительного интервала.*

Относительная погрешность равна отношению абсолютной погрешности к оценке истинного значения. Как правило, эту погрешность выражают в процентах. Величину, обратную относительной погрешности, называют **точностью** измерений.

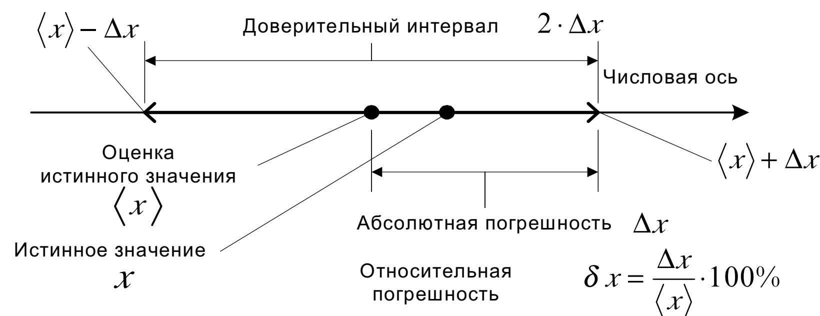


Рис. 1. Результат измерений $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$

Например $F = 53.2 \pm 0.4$ Н

При сравнении результатов измерения одной и той же физической величины поступают следующим образом. Если доверительные интервалы перекрываются, то говорят, что различия **незначимые** и результаты измерений согласуются. В противном случае различия считаются **значимыми** и результаты измерений не совпадают.

Пример: пусть при различных методах измерений одной и той же силы получены следующие результаты: F=240±8 Н, F=250±5 Н. Различие в 10 Н в данном случае является незначимым, и результаты согласуются. Если бы оба результата были F=242±2 Н, F=249±3 Н, то различие в 7 Н было бы значимым, и результаты измерений оказались бы не совпадающими.

По влиянию на результат измерения можно выделить следующие классы погрешности:

- ***Систематическая погрешность*** — погрешность, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторении измерений.
- ***Случайная погрешность*** — погрешность, изменяющаяся случайным образом при повторении измерений.
- ***Промах*** **(*грубая ошибка*)** — погрешность, существенно превосходящая ожидаемую при заданных условиях.

По источникам погрешности различают следующие ее виды:

- ***Методическая погрешность*** — погрешность, обусловленная несовершенством метода измерений.

- ***Инструментальная погрешность*** — погрешность средств измерений (приборов).
- ***Дополнительная погрешность*** — погрешность, обусловленная влиянием факторов, которые не учтены в модели объекта измерения.

Названные источники погрешности в общем случае могут иметь как систематическую, так и случайную составляющие погрешности, но вклад этих составляющих различен при различной организации эксперимента.

Учет и исключение (или уменьшение) систематической погрешности представляют одну из самых сложных задач теории измерений. Способы решения этой задачи зависят от конкретных видов измерений, и не существует общей методики ее решения. Часто используется подход, основанный на всестороннем теоретическом анализе процедуры измерения и характеристик применяемой аппаратуры. Такой анализ может дать оценку границ систематической погрешности. При точных измерениях оценка систематической погрешности производится по результатам измерения искомой величины различными, принципиально независимыми методами с применением различной аппаратуры. Многие современные способы анализа систематической погрешности используют аппарат математической статистики (дисперсионный, регрессионный, корреляционный, спектральный анализ), теории принятия решений, теории игр и др. Более детально эти вопросы рассматриваются в специальном курсе метрологии.

Случайная погрешность в большинстве случаев может быть уменьшена с помощью относительно простой статистической обработки результатов измерений.

Промахи относятся к аномальным результатам измерений, которые могут быть следствием кратковременного воздействия на процесс измерения некоторого мешающего фактора, преобладающего над остальными. Промах может быть вызван ошибкой оператора, проводящего измерение, или сбоем измерительной аппаратуры. В этих случаях аномальный результат должен быть отброшен. Однако отбрасывание аномальных данных является спорным вопросом, по которому у специалистов нет единого мнения. Например, из истории физики известно, что именно аномальные результаты экспериментов привели к великим открытиям. Поэтому при научных исследованиях и в большинстве технических измерений необходимо тщательно проанализировать причину промаха, в частности, многократно повторив эксперимент. Тем не менее, в хорошо изученной ситуации, если не удается найти внешнюю причину промаха, вопрос об отбрасывании аномального отсчета должен быть решен на основе обработки всех данных эксперимента.

При измерениях в лаборатории физического практикума эксперимент организован так, что:

1. Методической погрешностью можно пренебречь или ее значение можно оценить.
2. Инструментальная погрешность имеет только систематическую составляющую.
3. Дополнительная погрешность имеет только случайную составляющую.
4. Точность показаний измерительных устройств и приборов гарантируется.

2. ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

2.1. Инструментальная погрешность

Методика определения погрешности прибора приводится в его паспорте. Для характеристики большинства приборов часто используют понятие **приведенной погрешности**, равной абсолютной погрешности в процентах диапазона шкалы измерений. По приведенной погрешности приборы разделяются на классы точности. **Класс точности** указан на панели прибора и может принимать следующий ряд значений*:*

0.05; 0.1; 0.2; 0.5 — прецизионные;1.0; 1.5; 2.5; 4.0 — технические приборы.

Наибольшая абсолютная инструментальная погрешность

$$\Delta_a = K \cdot A/100, \qquad (1)$$

где K - класс точности, A - наибольшее значение шкалы прибора.

Из формулы (1) следует, что относительная погрешность будет минимальной, если измеряемая величина дает отброс стрелки индикатора на всю шкалу. Поэтому для оптимального использования прибора его предел выбирают так, чтобы **значение измеряемой величины попадало в конец шкалы**.

В метрологии [1,2], кроме формулы (1), используется и другие, более сложные определения инструментальной погрешности и связанного с ней класса точности, особенно для приборов с неравномерными шкалами.

Инструментальная погрешность приборов для измерения линейных размеров указана на самом приборе в виде абсолютной погрешности или в виде цены деления. Если на приборе не указан ни класс точности, ни абсолютная погрешность, то она принимается равной половине цены наименьшего деления.

Для приборов с цифровым отсчетом измеряемых величин метод вычисления погрешности приводится в паспортных данных прибора. Если эти данные отсутствуют, то в качестве абсолютной погрешности принимается значение, равное половине последнего цифрового разряда индикатора.



Инструментальную погрешность невозможно уменьшить статистической обработкой отсчетов.

Примеры считывания со шкал различных приборов показаны на рис. 2—7. Принцип устройства нониуса рассмотрен в приложении 5.

2.2. Случайная погрешность

При наличии случайных погрешностей наблюдаемые значения измеряемой величины при многократных измерениях случайным образом рассеяны относительно ее истинного значения. В этом случае действительное значение находят как наиболее вероятное из серии отсчетов, а погрешность характеризуют шириной интервала, который с заданной вероятностью покрывает истинное значение. Математическое обоснование ниже приведенных положений представлено в разделах 6, 7 и 8 и в литературе [3-7], применительно к практикуму по физике— в литературе [8,9].

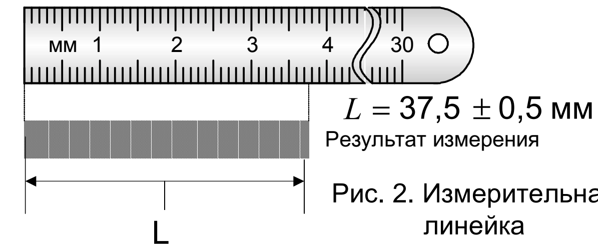


Рис. 2. Измерительная линейка

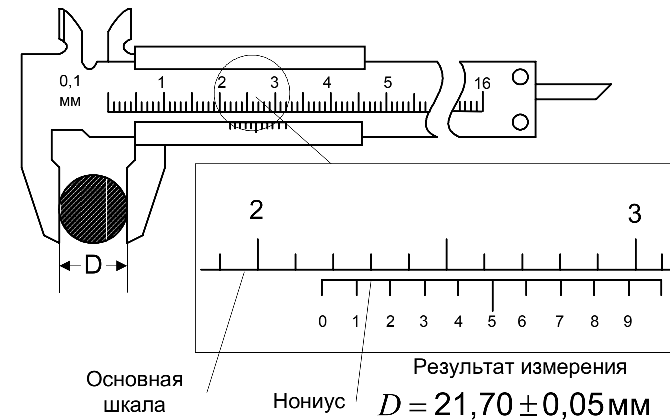


Рис. 3. Штангенциркуль

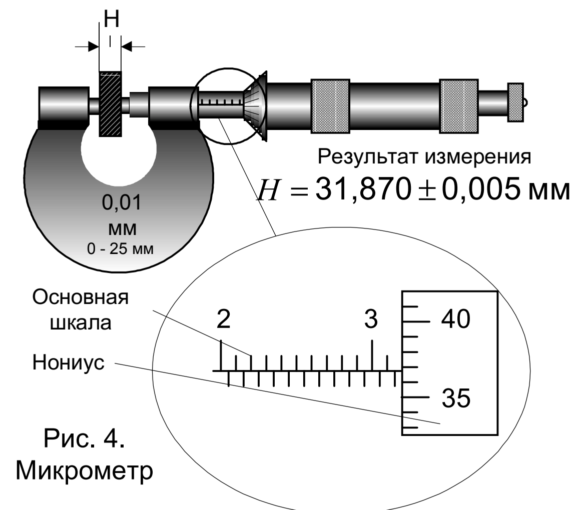


Рис. 4. Микрометр

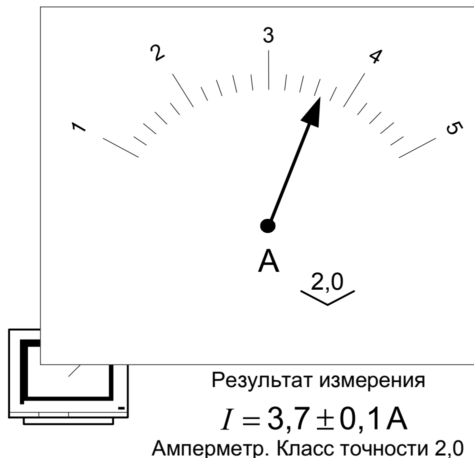


Рис. 6. Амперметр

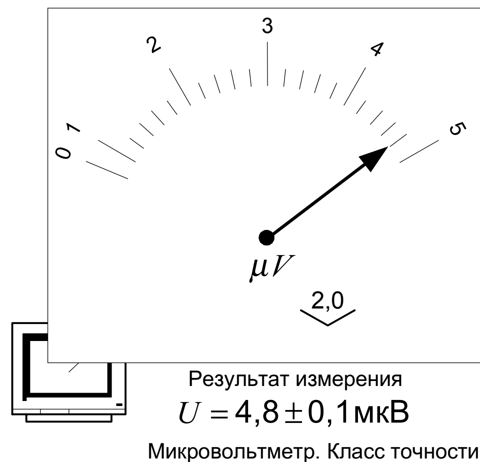


Рис. 5. Вольтметр

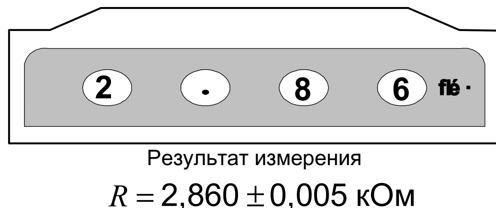


Рис. 7. Цифровой омметр

Наилучшей оценкой истинного значения величины X является

выборочное среднее значение

$$< x >= \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n}{N}, \qquad (2)$$

где x_n - отсчет величины X, N - число отсчетов.

Для оценки разброса отсчетов при измерении используется

выборочное среднее квадратическое отклонение отсчетов

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} (x_n - < x >)^2}{N-1}}. \qquad (3)$$

Выборочное среднее является случайной величиной и его разброс относительно истинного значения измеряемой величины оценивается

выборочным средним квадратическим отклонением среднего значения

$$S_{<x>} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}. \qquad (4)$$

Среднее квадратическое отклонение среднего из N отсчетов в $\sqrt{N}$ раз меньше среднего квадратического отклонения одного отсчета

Доверительным интервалом называется интервал

$$[< x > -\Delta, < x > +\Delta],$$

который с заданной степенью достоверности включает в себя истинное значение измеряемой величины (рис.1).

Доверительной вероятностью (надежностью) результата серии наблюдений называется вероятность α, с которой доверительный интервал включает истинное значение измеряемой величины.

Случайную составляющую погрешности принято выражать как полуширину доверительного интервала. Размер доверительного интервала обычно задают в виде кратного $S_{<x>}$ значения. Тогда

случайная составляющая погрешности многократных измерений



$$\Delta_x = t_\alpha S_{<x>}, \qquad (5)$$

где t_α ***- безразмерный коэффициент доверия (коэффициент Стьюдента).***

Коэффициент доверия показывает, во сколько раз нужно увеличить среднее квадратическое отклонение среднего, чтобы при заданном числе измерений получить заданную надежность их результата. Коэффициент доверия сложным образом зависит от надежности и числа измерений, и его значение определяют по статистическим таблицам (приложение 1).

При расчете случайной погрешности задаются надежностью измерений, которую (в зависимости от целей измерений и требований к ним) принимают равной 0,9; 0,95; 0,96; 0,98; 0,99; 0,997; 0,999.



Чем больше доверительная вероятность, тем надежнее оценка интервала и, вместе с тем, шире его границы.

Полная погрешность Δx прямых измерений равна квадратичной сумме ее составляющих: инструментальной — Δ_a и случайной — Δ_x



$$\Delta x = \sqrt{\Delta_a^2 + \Delta_x^2}, \qquad (6)$$

2.3. Промахи

Обработку прямых измерений рекомендуется начинать с проверки отсчетов на наличие промахов. Существует много критериев выявления и отбрасывания промахов, но ни один из них не является универсальным. Выбор критерия зависит от цели измерений, но решение отбросить какие-то данные, в конечном счете, всегда субъективно.

Сформулируем, так называемый, ***критерий Шовене*** [3]. Из полученного ряда, содержащего N отсчетов, выбирается аномальный отсчет — x_k и вычисляется модуль его отклонения от среднего значения в долях выборочного среднего квадратического отклонения:

$$Z = \frac{\left|x_k - \langle x \rangle\right|}{S_x}. \qquad (7)$$

Затем вычисляется вероятность этого отклонения, а также ожидаемое число n измерений, которые дадут отсчеты, имеющие отклонение Z не меньшее, чем испытуемый. Если получено n<0.5 (при округлении до целого n=0), то отсчет x_k считается промахом. Эту процедуру можно изменить и вычислить ожидаемое число M отсчетов, среди которых будет хотя бы один аномальный.

Если M>N, то отсчет x_k считается промахом. Связь между M и Z приведена в приложении 3.



Алгоритм обработки прямых измерений

1. ***Определить инструментальную погрешность.***
2. ***Вычислить среднее значение серии измерений —*** формула (2)
3. ***Вычислить среднее квадратическое отклонение отсчета —*** формула (3)
   Если промах устранен, то перейти к 5; иначе— к 4.
4. ***Проверить отсчеты на наличие промаха:***
   - ***отобрать аномальный отсчет;***
   - ***вычислить его относительное отклонение —*** формула (7)
   - ***определить ожидаемое число отсчетов, среди которых может быть аномальный —*** приложение 3
   - ***если это число больше числа отсчетов, то исключить аномальный отсчет и перейти к 2;иначе — перейти к 5.***
5. ***Вычислить выборочное среднее квадратическое отклонение среднего значения —*** формула (4)
6. ***Определить коэффициент доверия для заданной надежности и полученного числа отсчетов —*** приложение 1
7. ***Вычислить случайную погрешность —*** формула (5)
8. ***Вычислить полную погрешность —*** формула (6)
9. ***После округлений результат обработки измерений записать в форме:***
   $x = (<x> \pm \Delta x)$ Ÿ.; $\quad \delta = (\Delta x / <x>) \cdot 100\%; \quad \alpha.$

Иногда необходимо объединить результаты нескольких серий прямых измерений одной и той же физической величины. Эту задачу можно решить следующим образом. Пусть результаты M измерений представлены в виде $x = <x_1> \pm \Delta x_1, x = <x_2> \pm \Delta x_2, \ldots, x = <x_M> \pm \Delta x_M$. Наилучшее значение $<x>$ и его погрешность Δx вычисляются по формулам:



$$<x> = \sum_{m=1}^{M} w_m x_m \Big/ \sum_{m=1}^{M} w_m, \qquad \Delta x = \left(\sum_{m=1}^{M} w_m\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

где $w_m = \dfrac{1}{(\Delta x_m)^2}$ ***- статистический вес каждой серии измерений.***

3. ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть $u = f(x, y, \ldots)$ — функциональная зависимость между измеряемой величиной u и величинами $x, y, \ldots$, значения которых найдены прямыми измерениями. Действительное значение $< u >$ определяется как:

$$< u > = f(< x >, < y >, \ldots). \quad (9)$$

Получим выражение для погрешности Δu. Если зафиксировать значения всех аргументов кроме одного, например x, то приращение функции при изменении ее аргумента имеет вид:

$$\Delta_x u = f(< x > + \Delta x, < y >, \ldots) - f(< x >, < y >, \ldots). \quad (10)$$

Если значение Δx мало, то в интервале $[< x > - \Delta x, < x > + \Delta x]$ функцию $u = f(x)$ можно считать линейной и

$$\Delta_x u \approx (\partial f / \partial x) \cdot \Delta x. \quad (11)$$

Величина $\Delta_x u$ характеризует погрешность Δu, обусловленную погрешностью Δx. Аналогично определяются составляющие погрешности Δu, вносимые другими аргументами. Полная погрешность Δu косвенных измерений u вычисляется либо с помощью квадратичного суммирования либо суммирования по модулю ее составляющих, вносимых каждым аргументом:

$$\Delta u = \sqrt{(\Delta_x)^2 + (\Delta_y)^2 + \ldots} \quad (12)$$

$$\Delta u = |\Delta_x| + |\Delta_y| + \ldots. \quad (13)$$

Соотношения (12) применяется в том случае, когда выполняются два условия. Во-первых, погрешность аргументов обусловлена влиянием многих факторов, среди которых нет преобладающего фактора. Во-вторых, погрешности аргументов статистически не связаны. В остальных случаях используется соотношение (13). Однако правило суммирования (13) часто приводит к завышенному значению погрешности косвенных измерений. Более подробные сведения о суммирования погрешностей приведены в разделе 8.

Пример. Пусть значение сопротивления на участке цепи постоянного тока определяется по результатам прямых измерений тока и напряжения на этом участке. Если погрешность измерения тока и напряжения обусловлены влиянием многих факторов (температуры, внутренних сопротивлений амперметра и вольтметра, электрических наводок, нестабильности источника питания и др.), то при суммировании погрешностей лучше использовать формулу (12). Если погрешность прямых измерений обусловлена в основном случайным изменением внутреннего сопротивлением источника питания, то лучше применить формулу (13).

Соотношения (9-12) позволяют использовать два алгоритма обработки косвенных измерений. В одном из них необходимо найти аналитические выражения для частных производных, в другом - используются только численные методы. В приложении 3 приведены формулы для вычисления погрешности первым способом для некоторых часто встречающихся на практике функциональных связей.



Алгоритм обработки косвенных измерений

1. ***По известной зависимости измеряемой величины от её аргументов, значения которых найдены с помощью прямых измерений, вычислить действительное значение функции —*** формула (9)
2. ***Вычислить составляющие погрешности как приращения функции по каждому аргументу —*** формула (10)
   или
   найти частные производные по всем аргументам и вычислить составляющие погрешности — формула (11)
3. ***Вычислить полную погрешность функции —*** формула (12) формула (13)
4. ***После округлений результат обработки измерений записать в форме:***
   $u = (< u > \pm \Delta u)$ /Ÿ.; $\delta = (\Delta u / < u >) \cdot 100\%$; α.

Часто измеряемая величина p является параметром функциональной зависимости $y = f(x, p)$ величин x и y, которые находят в результате серии прямых измерений с однократными наблюдениями. В этом случае случайную составляющую погрешности косвенных измерений Δ_p определяют с помощью обработки *вычисленных* значений $p_m = F(x_m, y_m)$ по методике обработки *прямых измерений* (здесь m=1..M, где M - число однократных наблюдений величин x и y).

Погрешность косвенных измерений функции, как правило, больше погрешности прямых измерений ее аргументов. Однако в некоторых частных случаях это правило может нарушаться. Рассмотрим такой частный случай на примере измерения периода колебаний.

Пример. Пусть при прямом измерении периода колебаний с помощью секундомера получено значение T=2,0±0,2 с. Тем же секундомером период можно измерить косвенно, зафиксировав время t=200±0,2 с, за которое совершилось N=100 колебаний. Тогда период T=t/N, т.е. T=2,000±0,002 с. Говорить о том, что в данном случае полная погрешность измерения меньше инструментальной погрешности некорректно, так как речь идет об измерении разных величин, а именно: прямом измерении времени и косвенном измерении периода. Последний вид измерений непосредственно не связан с инструментальной погрешностью.

4. ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ.

Незначащими цифрами числа называются нули в начале десятичных дробей, меньших 1, и нули в конце числа, заменившие цифры, отброшенные после округления. Остальные цифры называются **значащими.**

Сомнительной цифрой результата измерения называется цифра, стоящая в разряде, соответствующем старшему разряду со значащей цифрой в значении погрешности. Цифры, стоящие слева от сомнительной называются **верными**, а справа — **неверными**.

Примеры.

Числа 586 ± 6; $0,00234 \pm 0,00002$; $1,00 \pm 0,03$; 2000 ± 30 содержат по три значащие цифры. При округлении числа 299793 ± 1 до значения $3 \cdot 10^5$ допущена погрешность 207, поэтому в полученном числе сотни являются сомнительной цифрой и, следовательно, последние два нуля - незначащие.



Погрешность обычно выражается одной значащей цифрой и лишь при особо ответственных измерениях - двумя.



Округление погрешности и действительного значения.

Погрешность округляется до одной значащей цифры. Эта цифра является сомнительной т.к. ***значение погрешности не имеет верных цифр***.

Действительное значение округляется до цифры, разряд которой равен разряду значащей цифры погрешности. ***Последняя цифра действительного значения — сомнительная, остальные цифры - верные.***

При особо точных измерениях погрешность округляется до двух значащих цифр, если первая их них меньше 4-х и до одной цифры, если первая цифра больше 3-х. Иногда в качестве второй цифры оставляют 0 или 5.

Запись чисел, считанных со шкалы прибора.

В числовом значении измеряемой величины, считанном со шкалы прибора, записываются только верные цифры и сомнительная цифра, разряд которой определяется по значению инструментальной погрешности прибора.



Округление чисел.

Лишние цифры у целых чисел заменяются нулями, а у десятичных дробей отбрасываются. Если заменяемая нулем или отбрасываемая цифра старшего разряда меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяются. Если указанная цифра больше 5, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на 1. Если заменяемая нулем или отбрасываемая цифра равна 5, то округление производится следующим образом: последняя цифра в округленном числе остается без изменения, если она четная, и увеличивается на 1, если она нечетная.



Округление при вычислениях.

При записи результатов промежуточных вычислений сохраняется одна запасная цифра — цифра, стоящая справа от сомнительной. При сложении и вычитании приближенных чисел разряд сомнительной цифры результата совпадает со старшим из разрядов сомнительных цифр слагаемых. Результат умножения и деления содержит столько значащих цифр, сколько их в исходном данном с наименьшим количеством значащих цифр. При возведении в степень (извлечении корня) приближенного числа результат должен иметь столько значащих цифр, сколько их в основании (подкоренном выражении). При логарифмировании в мантиссе сохраняется столько значащих цифр, сколько их в исходном числе. Если один из операндов точное число, то количество его цифр не влияет на округление результата операции. Если при вычислениях используются табличные данные, то все их цифры верные.

Квадратичное суммирование

Если при квадратичном суммировании одно из чисел меньше другого в 3 и более раз, то им можно пренебречь.

Приведем примеры округления результатов измерений.

Запись до округления	Запись после округления
123357±678 А/м.	123400±700 А/м.
123357±678 В.	123,4±0.7 кВ.
237,46±0,13 мм	237,5±0,1 мм.
0,00283±0,00034 кг.	$(2,8\pm0,3)10^{-3}$ кг.
1,045±0,000003 с.	1,045000±0,000003 с.
359623±307 с.	$(359,6\pm0,3)10^{3}$ с.
0,000000047±0,0000000098 м.	50±10 нм.
$67.89\cdot10^{-7}\pm49,3\cdot10^{-8}$ А	6,8±0,5 мкА.
589±0,69 Н.	589,0±0,7 Н.
589±0,078 Н.	589,00±0,08 Н.

5. ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Пример 5.1. Обработка прямых измерений.

Вольтметром измерено 10 отсчетов напряжение U в электрической цепи. Вольтметр, класс точности которого K=2.5, имеет максимальное значение шкалы, равное A=200 В. Результаты измерений представлены в таблице.

Обработать результаты измерений, обеспечив 98% надежность оценки напряжения.

№	U, В
1	145
2	140
3	145
4	105
5	130
6	150
7	150
8	155
9	175
10	160

- Вычисляем инструментальную погрешность

$$\Delta_a = \frac{K \cdot A}{100} = \frac{2.5 \cdot 200}{100} = 5\text{В}.$$

- Для заданной доверительной вероятности $\alpha = 98\%$ и количества отсчетов $N = 10$ определяем коэффициент доверия $t_{98;10} = 2.8$ (приложение 1).
- Вычисляем среднее значение

$$\langle U \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N} U_n}{N} \quad \langle U \rangle = 146 \text{ В}.$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение отсчетов

$$S_U = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(U_n - <U>)^2}{N-1}} \qquad S_U = 18.6\text{В}.$$

- Проверяем отсчеты на наличие промахов.

Аномальным отсчетом является отсчет №4. Вычисляем нормированное отклонение U_4 от среднего значения

$$z = \frac{|U_4 - \langle U \rangle|}{S_U} = \frac{|105-146|}{18.6} = 2.17 .$$

Согласно данным приложения 3, количество опытов, при котором полученный отсчет нельзя считать промахом, равно 17. Это число больше, чем $N = 10$. Следовательно, отсчет U_4=105В является промахом и его нужно удалить из обрабатываемого ряда.

Новый ряд отсчетов напряжения ($N = 9$, $t_{98;9} = 2.9$)

№	U, В
1	145
2	140
3	145
4	130
5	150
6	150
7	155
8	175
9	160

- Вычисляем новое среднее значение

$$\langle U \rangle = 150 \text{ В}.$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение

$$S_U = 12.7\text{В}.$$

- Вычисляем случайную составляющую погрешности

$$S_{\langle U \rangle} = \frac{S_U}{\sqrt{N}} = \frac{12.7}{\sqrt{9}} = 4.23\text{В},$$

$$\Delta_U = t_{\alpha;N} \cdot S_{\langle U \rangle} = 2.9 \cdot 4.23 = 12.2 \text{ В}$$

- Вычисляем полную погрешность

абсолютную

$$\Delta U = \sqrt{\Delta_a{}^2 + \Delta_U{}^2} = \sqrt{5^2 + 12.2^2} = 13 \approx 10 \text{ В},$$

относительную

$$\delta_U = \frac{\Delta U}{\langle U \rangle} = \frac{10}{150} = 6.6\% .$$

- После округлений результат измерения напряжения записываем в виде:

$$U = 150 \pm 10\text{В} \quad \delta = 7\% \quad \alpha = 98\% .$$

Пример 5.2. Объединение результатов прямых измерений.

В трех различных условиях измерено сопротивление одного и того же проводника. Результаты измерений представлены в виде:

$R_1 = 11 \pm 2$ Ом.

$R_2 = 12 \pm 2$ Ом.

$R_1 = 10 \pm 3$ Ом.

Необходимо объединить эти измерения.

- Находим статистический вес (вклад) каждого измерения

$$w_1 = \frac{1}{\Delta R_1^2} = \frac{1}{2^2} = 0.25 \, 1/\text{Ом}^2 ,$$

$$w_2 = \frac{1}{\Delta R_2^2} = \frac{1}{2^2} = 0.25 \quad 1/\text{Ом}^2 ,$$

$$w_3 = \frac{1}{\Delta R_3^2} = \frac{1}{3^2} = 0.11 \quad 1/\text{Ом}^2 .$$

- Находим новую оценку сопротивления

$$\langle R \rangle = \frac{\langle R_1 \rangle \cdot w_1 + \langle R_2 \rangle \cdot w_2 + \langle R_3 \rangle \cdot w_3}{w_1 + w_2 + w_3} =$$

$$= \frac{11 \cdot 0.25 + 12 \cdot 0.25 + 10 \cdot 0.11}{0.25 + 0.25 + 0.11} = 11.2 \text{ Ом}.$$

- Находим новую оценку погрешности

$$\Delta R = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2 + w_3}} = \frac{1}{\sqrt{0.25 + 0.25 + 0.11}} = 1.28 \text{ Ом}$$

- Результат совместной оценки сопротивления

$$R = 11 \pm 1 \text{Ом}.$$

Пример 5.3. Обработка результатов косвенных измерений.

Прямыми измерениями найдены значения массы m, радиуса R и линейной скорости v равномерного вращения по окружности материальной точки. Необходимо оценить значение центробежной силы F, действующей на материальную точку.

$$m = 310 \pm 6 \text{ г} \qquad R = 104 \pm 5 \text{ мм} \qquad v = 30 \pm 1 \text{м/с} \qquad F = \frac{m \cdot v^2}{R}.$$

Рассмотрим три способа расчета погрешности косвенных измерений

1. Алгоритм, использующий вычисление производных измеряемой величины по её аргументам.

- Вычисляем среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{\langle m \rangle \cdot \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{0.31 \cdot 30^2}{0.104} = 2683 \text{ Н} \approx 2.68 \text{ кН} .$$

- Находим частные производные и вычисляем их значения при средних значениях аргументов

$$\frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{30^2}{104} = 8.65 \ \frac{\text{Н}}{\text{г}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = -\frac{\langle m \rangle \cdot \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle^2} = -\frac{310 \cdot 30^2}{104^2} = -25.8 \ \frac{\text{Н}}{\text{мм}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{2 \cdot \langle m \rangle \cdot \langle v \rangle}{\langle R \rangle} = \frac{2 \cdot 310 \cdot 30}{104} = 179 \ \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$$

- Вычисляем составляющие погрешности от каждого аргумента

$$\Delta F_m = \left| \frac{\partial F}{\partial m} \right| \cdot \Delta m = 8.65 \cdot 6 = 51.9 \text{ Н},$$

$$\Delta F_R = \left| \frac{\partial F}{\partial R} \right| \cdot \Delta R = 25.8 \cdot 5 = 129 \text{ Н},$$

$$\Delta F_v = \left| \frac{\partial F}{\partial v} \right| \cdot \Delta v = 179 \cdot 1 = 179 \text{ Н}.$$

- Вычисляем полную погрешность

абсолютную

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_m{}^2 + \Delta F_R{}^2 + \Delta F_v{}^2} =$$

$$= \sqrt{51.9^2 + 129^2 + 179^2} = 227 \text{ Н} \approx 0.2 \text{ кН}$$

относительную

$$\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} = \frac{0.2}{2.7} = 7\%$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$F = 2.7 \pm 0.2 \text{ кН}, \qquad \delta F = 7\% .$$

2. Алгоритм, использующий вычисление приращений измеряемой величины по её аргументам.

- Вычисляем среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{\langle m \rangle \cdot \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{0.31 \cdot 30^2}{0.104} = 2683 \text{ Н} \approx 2.68 \text{ кН}$$

- Вычисляем приращения функции по её аргументам

$$\Delta F_m = \left|F(m+\Delta m, R, v) - F(m,R,v)\right| = \left|\frac{(0.31+0.006)\cdot 30^2}{0.104} - 2683\right| = 51.6\ \text{Н}$$

$$\Delta F_m = \left|F(m, R+\Delta R, v) - F(m,R,v)\right| = \left|\frac{0.31\cdot 30^2}{0.104+0.005} - 2683\right| = 123\ \text{Н},$$

$$\Delta F_m = \left|F(m, R, v+\Delta v) - F(m,R,v)\right| = \left|\frac{0.31\cdot(30+1)^2}{0.104} - 2683\right| = 182\ \text{Н}.$$

- Вычисляем полную погрешность
  абсолютную

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_m{}^2 + \Delta F_R{}^2 + \Delta F_v{}^2} =$$

$$= \sqrt{51.6^2 + 123^2 + 182^2} = 226\ \text{Н} \approx 0.2\ \text{кН}$$

  относительную

$$\delta F = \frac{\Delta F}{\langle F\rangle} = \frac{0.2}{2.7} = 7\%$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$F = 2.7 \pm 0.2\ \text{кН}, \qquad \delta F = 7\% .$$

3. Алгоритм, использующий сложение абсолютных величин погрешностей

- Вычисляем среднее значение силы

$$\langle F\rangle = \frac{\langle m\rangle\cdot\langle v\rangle^2}{\langle R\rangle} = \frac{0.31\cdot 30^2}{0.104} = 2683\ \text{Н} \approx 2.68\ \text{кН}$$

- Вычисляем относительные погрешности аргументов

$$\delta m = \frac{\Delta m}{\langle m\rangle} = \frac{6}{310} = 0.019 \approx 2\%$$

$$\delta R = \frac{\Delta R}{\langle R\rangle} = \frac{5}{104} = 0.048 \approx 5\%$$

$$\delta v = \frac{\Delta v}{\langle v\rangle} = \frac{1}{30} = 0.033 \approx 3\%$$

- Вычисляем относительную погрешность функции по формулам приложения 2

$$\delta F = \delta m + \delta R + 2\cdot\delta v = 2 + 5 + 2\cdot 3 = 13\%$$

- Вычисляем абсолютную погрешность функции

$$\Delta F = \langle F\rangle\cdot\delta F = 2.68\cdot 0.13 = 0.349\ \text{Н}$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$\text{F} = 2.7 \pm 0.3\ \text{кН}, \qquad \delta F = 11\% .$$

Пример 5.4. Обработка результатов косвенных измерений.

В этом примере сравним трудоемкость вычисления погрешностей косвенных измерений по двум алгоритмам. Рассмотрим случая сложной функциональной зависимости измеряемой величины от аргументов.

Пусть прямыми измерениями найдены значения элементов последовательного колебательного контура. Активного сопротивления $R = 10 \pm 1$ Ом. Индуктивности $L = 30.0 \pm 1.5$ мГ. Емкости $C = 100 \pm 2$ мкФ. В контуре возбуждены вынужденные колебания на частоте $\omega = 1000$ рад/с. Амплитуда источника ЭДС $\text{E} = 10$ В. Связь между амплитудой тока и параметрами элементов контура определяется соотношением:

$$I(R,L,C) = \frac{\text{E}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2}}.$$

Амплитуда ЭДС E и частота ω измерены с большой точностью и могут рассматриваться как константы.

1. Алгоритм, использующий вычисление приращений измеряемой величины по её аргументам

- Вычисляем среднее значение тока

$$I(\langle R\rangle,\langle L\rangle,\langle C\rangle) = \frac{\text{E}}{\sqrt{\langle R\rangle^2 + \left(\omega\cdot\langle L\rangle - \frac{1}{\omega\cdot\langle C\rangle}\right)^2}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10^2 + \left(10^3\cdot 30\cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3\cdot 100\cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0.447\ \text{А}$$

- Вычисляем приращения функции

$$\left|\Delta I_R = I(R+\Delta R,,C) - I(R,L,C)\right| =$$

$$= \left| \frac{10}{\sqrt{(10+1)^2 + \left(10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} - 0.447 \right| = 0.0091\text{ А} = 9.1\text{ мА}$$

$$\left|\Delta I_L = I(R,L+\Delta L,C) - I(R,L,C)\right| =$$

$$= \left| \frac{10}{\sqrt{10^2 + \left(10^3 \cdot (30+1.5) \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} - 0.447 \right| = 0.025\text{ А} = 25\text{ мА}$$

$$\left|\Delta I_C = I(R,L,C+\Delta C) - I(R,L,C)\right| =$$

$$= \left| \frac{10}{\sqrt{10^2 + \left(10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot (100+2) \cdot 10^{-6}}\right)^2}} - 0.447 \right| = 0.0035\text{ А} = 3.5\text{ мА}$$

- Вычисляем полную погрешность
  абсолютную

$$\Delta I = \sqrt{\Delta I_R{}^2 + \Delta I_L{}^2 + \Delta I_C{}^2} = \sqrt{9.1^2 + 25^2 + 3.5^2} = 26.8 \approx 30\text{ мА}$$

  относительную

$$\delta I = \frac{\Delta I}{\langle I \rangle} = \frac{30}{450} = 7\%$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$I = 450 \pm 30\text{ мА}, \qquad \delta F = 7\% \;.$$

2. Алгоритм, использующий вычисление производных измеряемой величины по её аргументам

- Вычисляем среднее значение тока.

- Вычисляем производные функции

$$\frac{\partial I}{\partial R} = \frac{-\text{E} \cdot R}{\sqrt{\left[R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2\right]^3}}$$

$$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{-\text{E} \cdot \omega \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)}{\sqrt{\left[R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2\right]^3}}$$

$$\frac{\partial I}{\partial C} = \frac{-\text{E} \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)}{\omega \cdot C^2 \cdot \sqrt{\left[R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2\right]^3}}$$

- Вычисляем значения производных от средних значений аргументов

$$\frac{\partial I}{\partial R} = \frac{-10 \cdot 10}{\sqrt{\left[10^2 + \left(10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-4}}\right)^2\right]^3}} = 8.9 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{А}}{\text{Ом}}$$

$$\frac{\partial I}{\partial L} = \frac{-10 \cdot \left(10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-4}}\right)}{\sqrt{\left[10^2 + \left(10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-4}}\right)^2\right]^3}} = -17.9\ \frac{\text{А}}{\text{Г}}$$

$$\frac{\partial I}{\partial C} = \frac{-10 \cdot \left(10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-4}}\right)}{\cdot 10^3 \cdot 10^{-8} \sqrt{\left[10^2 + \left(10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-3} - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-4}}\right)^2\right]^3}} = -1790\ \frac{\text{А}}{\text{Ф}}$$

- Вычисляем составляющие погрешности функции

$$\Delta I_R = \left|\frac{\partial I}{\partial R}\right| \cdot \Delta R = 8.94 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 8.94 \cdot 10^{-3} \text{ А} \approx 8.9 \text{ мА}$$

$$\Delta I_L = \left|\frac{\partial I}{\partial L}\right| \cdot \Delta L = 17.9 \cdot 1.5 \cdot 10^{-3} = 26.8 \cdot 10^{-3} \text{ А} \approx 27 \text{ мА}$$

$$\Delta I_C = \left|\frac{\partial I}{\partial C}\right| \cdot \Delta C = 1790 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot = 3.58 \cdot 10^{-3} \text{ А} \approx 3.6 \text{ мА}$$

- Вычисляем полную погрешность
  абсолютную

$$\Delta I = \sqrt{\Delta I_R^{\,2} + \Delta I_L^{\,2} + \Delta I_C^{\,2}} == \sqrt{8.9^2 + 27^2 + 3.6^2} = 29 \approx 30 \text{ мА}$$

относительную

$$\delta I = \frac{\Delta I}{\langle I \rangle} = \frac{30}{450} = 7\%$$

- После округления записываем результат косвенных измерений

$$I = 450 \pm 30 \text{ мА}, \qquad \delta F = 7\% \ .$$

Пример 5.5. Обработка результатов косвенных измерений.

В этом примере рассмотрим влияние статистической связи погрешностей аргументов на результат косвенных измерений их функции.

Источник ЭДС постоянного тока с некоторым внутренним сопротивлением нагружен на согласованную по мощности активную нагрузку (нагрузка называется согласованной, если в ней выделяется максимальная мощность, в этом случае сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника ЭДС).

Прямыми измерениями найдены N=10 значений тока I и напряжения U на нагрузке. Инструментальная погрешность измерения тока ΔI_a=0.005 А, напряжения - ΔU_a=0.05 В. Надежность оценок тока и напряжения должна составлять 95%. Необходимо с помощью косвенных измерений определить мощность P, потребляемую от источника. По закону Джоуля - Ленца $P = I \cdot U$.

Известно, что основной причиной разброса измеренных значений тока и напряжения является нестабильность источника, приводящая к случайным изменениям его ЭДС и внутреннего сопротивления. Следовательно, изменения тока и напряжения на нагрузке будут статистически связанными (коррелированными), так как порождаются одной и той же причиной. В этом случае

суммирование погрешностей тока и напряжения необходимо производить не квадратически, а по абсолютной величине.

Рассмотрим порядок вычислений мощности.

- Для заданной доверительной вероятности α=95% и количества отсчетов N=10 определяем коэффициент доверия 2.3 (приложение 1.)

№	I, A	U, B
1	0.265	6.55
2	0.255	6.40
3	0.225	5.60
4	0.245	6.20
5	0.235	5.95
6	0.210	5.20
7	0.260	6.55
8	0.240	6.00
9	0.210	5.30
10	0.215	5.40

- Вычисляем среднее значение тока и напряжения

$$\langle I \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N} I_n}{N} \qquad \langle I \rangle = 0.236 \text{ А.}$$

$$\langle U \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N} U_n}{N} \qquad \langle U \rangle = 5.92 \text{ В.}$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение тока и напряжения

$$S_I = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} (I_n - < I >)^2}{N-1}}$$

$$S_I = 0.021 \text{ А.}$$

$$S_U = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N} (U_n - < U >)^2}{N-1}} \qquad S_U = 0.51 \text{ В.}$$

- Вычисляем коэффициент корреляции тока и напряжения

$$r_{IU} = \frac{\sum_{n=1}^{N} (I_n - < I >) \cdot (U_n - < U >)}{(N-1) \cdot S_I \cdot S_U} \qquad r_{IU} = 0.995$$

Согласно данным приложения 4 при N=10 вероятность того, что ток и напряжение на нагрузке некоррелированы равна нулю. Следовательно, экспериментальные данные указывают на связь между погрешностью тока и напряжения.

- Вычисляем случайную составляющую погрешности тока и напряжения

$$S_{\langle I \rangle} = \frac{S_I}{\sqrt{N}} = \frac{0.021}{\sqrt{10}} = 0.0066 \text{ А}, \quad S_{\langle U \rangle} = \frac{S_U}{\sqrt{N}} = \frac{0.51}{\sqrt{10}} = 0.16 \text{ В},$$

$$\Delta_I = t_{95;10} \cdot S_{\langle I \rangle} = 2.3 \cdot 0.066 = 0.015 \text{ А}$$

$$\Delta_U = t_{95;10} \cdot S_{\langle U \rangle} = 2.3 \cdot 0.16 = 0.37 \text{ В}$$

- Вычисляем полную погрешность

абсолютную $\Delta I = \Delta_I = 0.015$ А

$\Delta U = \Delta_U = 0.37$ В,

относительную $\delta_I = \dfrac{\Delta I}{\langle I \rangle} = \dfrac{0.015}{0.24} = 6\%$

$\delta_U = \dfrac{\Delta U}{\langle U \rangle} = \dfrac{0.37}{5.9} = 6\%$

- После округлений получаем результаты измерения тока и напряжения

$$I = 240 \pm 20 \text{ мА} \quad \delta = 6\% \quad \alpha = 95\%$$

$$U = 5.9 \pm 0.4 \text{ В} \quad \delta = 6\% \quad \alpha = 95\%$$

- Вычисляем среднее значение мощности

$$\langle P \rangle = \langle I \rangle \cdot \langle U \rangle = 0.24 \cdot 5.9 = 1.4 \text{ Вт}.$$

- Вычисляем относительную погрешность измерения мощности

$$\delta P = \delta I + \delta U = 6 + 6 = 12\%.$$

- Вычисляем абсолютную погрешность измерения мощности

$$\Delta P = \langle P \rangle \cdot \delta P = 1.4 \cdot 0.12 = 0.17 \text{ Вт}.$$

- Результат косвенных измерений мощности

$$P = 1.4 \pm 0.2 \text{ Вт}. \qquad \delta P = 12\%.$$

При квадратическом суммировании погрешностей корреляция между отсчетами прямых измерений не учитывается. Это может привести к занижению погрешности косвенных измерений, что равноценно уменьшению надежности косвенных измерений. Иногда уменьшение погрешности может достигнуть такой величины, при которой доверительный интервал не будет покрывать истинное значение. В данном случае при квадратическом суммировании погрешностей измерения тока и напряжения получаем

$$\Delta P = \sqrt{(\langle U \rangle \cdot \Delta I)^2 + (\langle I \rangle \cdot \Delta U)^2} =$$
$$= \sqrt{(5.9 \cdot 0.015)^2 + (0.24 \cdot 0.4)^2} = 0.13 \text{ Вт},$$

$$P = 1.4 \pm 0.1 \text{ Вт}. \ . \ \delta P = 7\%$$

В рассмотренной задаче истинное значение мощности

$$P = 1.44 \text{ Вт}.$$

Для сравнения рассмотрим ту же измерительную задачу, но в условиях, при которых разброс отсчетов тока и напряжения обусловлен большим числом не доминирующих факторов. В этом случае погрешности отсчетов тока и напряжения статистически не связаны.

- Для заданной доверительной вероятности $\alpha = 95\%$ и количества отсчетов N=10 определяем коэффициент доверия $t_{95;10} = 2.3$. Вычисляем среднее значение тока и напряжения

№	I, A	U, B
1	0.290	5.55
2	0.285	5.30
3	0.285	5.55
4	0.275	5.05
5	0.190	4.30
6	0.245	6.05
7	0.220	5.90
8	0.275	6.55
9	0.230	8.20
10	0.210	6.80

$$\langle I \rangle = 0.251 \text{ А}. \qquad \langle U \rangle = 5.92 \text{ В}.$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение тока и напряжения

$$S_I = 0.036 \text{ А},$$

$$S_U = 1.08 \text{ В}.$$

- Вычисляем коэффициент корреляции тока и напряжения

$$r_{IU} = 0.111.$$

Согласно прил. 4. при данном числе измерений вероятность того, что погрешности тока и напряжения на нагрузке не связаны между собой, равна 78%. Следовательно, экспериментальные данные свидетельствуют об отсутствии связи между погрешностями тока и напряжения.

- Проверяем отсчеты на наличие промахов.

Аномальным отсчетом является отсчет напряжения №9. Вычисляем нормированное отклонение U_9 от среднего значения $z = 2.114$.

Количество опытов, при котором данный результат нельзя считать промахом, равно 14.(приложение 3). Это число больше, чем N=10. Следовательно, отсчет $U_9 = 8.2$ В является промахом и его нужно удалить из обрабатываемого ряда. Новый ряд имеет $N = 9$ отсчетов и $t_{95;9} = 2.3$

- Вычисляем новое среднее значение и среднее квадратическое отклонение

$$\langle U \rangle = 5.67 \text{ В}. \qquad S_U = 0.76 \text{ В}.$$

- Вычисляем случайную составляющую погрешности

$$S_{\langle I\rangle} = 0.012 \text{ А}, \qquad \Delta_I = 0.028 \text{ А}$$

$$S_{\langle U\rangle} = 0.76 \text{ В}, \qquad \Delta_U = 0.18 \text{ В}$$

- Вычисляем полную абсолютную и относительную погрешность

$$\Delta I = 0.03 \text{ А}, \qquad \Delta U = 0.4 \text{ В},$$

$$ä_U = 12\% \qquad \delta_U = 7\%$$

- Результат прямых измерений тока и напряжения

$$I = 0.25 \pm 0.03 \text{ А} \quad \delta = 12\% \quad \alpha = 95\%$$

$$U = 5.7 \pm 0.4 \text{ В} \quad \delta = 7\% \quad \alpha = 95\%$$

- Вычисляем среднее значение мощности

$$\langle P\rangle = 1.43 \text{ Вт}.$$

- Вычисляем относительную погрешность измерения мощности при квадратичном суммировании погрешностей измерения тока и напряжения

$$\Delta P = \sqrt{\left(\langle U\rangle \cdot \Delta I\right)^2 + \left(\langle I\rangle \cdot \Delta U\right)^2} = \sqrt{(5.7\cdot 0.03)^2 + (0.25\cdot 0.4)^2} = 0.2 \text{ Вт},$$

$$P = 1.4 \pm 0.2 \text{ Вт}. \ \delta P = 14\%.$$

При отсутствии корреляции между аргументами суммирование их погрешностей по абсолютной величине приведет к завышению погрешности косвенных измерений функции и к расширению доверительного интервала, т.е. к повышению надежности измерений. Такая завышенная оценка погрешности допустима. В данном случае

$$\delta P = \delta I + \delta U = 12 + 7 = 19\%.$$

$$\Delta P = \langle P\rangle \cdot \delta P = 1.4 \cdot 0.19 = 0.3 \text{ Вт}.$$

$$P = 1.4 \pm 0.3 \text{ Вт}. \qquad \delta P = 21\%.$$

Пример 5.6. (комплексный). Экспериментальная проверка закона инерции.

Для проверки законов инерции произведено измерение центробежной силы инерции, действующей на тело при его равномерном вращении. Тело массой m было установлено на равномерно вращающейся платформе на расстоянии R от оси вращения. Линейная скорость v тела измерялась тахометром (прибором для измерения угловой скорости), шкала которого проградуирована в единицах линейной скорости. Точность отсчета скорости составляла 0.5м/с. Радиус

вращения тела измерялся линейкой с ценой деления 1 мм. Масса тела измерялась весами, погрешность которых 1 г. Центробежная сила

$$F = \frac{m\cdot v^2}{R}.$$

Независимо, центробежная сила инерции была измерена с помощью динамометра с ценой деления 10 Н. Измерения массы, радиуса вращения, скорости тела и силы повторены 6 раз. Результаты представлены в таблице

№ отсчета	Масса m, г	Радиус R, мм	Скорость v, м/с	Сила F, Н
1	315	99	30.0	2710
2	313	103	30.0	2210
3	305	111	30.0	1940
4	352	104	29.5	2490
5	306	105	28.5	2760
6	313	104	31.0	2680

Обработка прямых измерений массы

Инструментальная погрешность $\Delta_a = 1$г.

Число отсчетов $N = 6$

Доверительная вероятность $\alpha = 95\%$

Коэффициент доверия $t_{95;6} = 2.6$

- Вычисляем среднее значение

$$\langle m\rangle = 317 \text{ г}$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение отсчетов

$$S_m = 17.5 \text{ г}$$

- Проверяем отсчеты на наличие промахов.

Аномальным отсчетом является отсчет №4. Вычисляем нормированное отклонение m_4 от среднего значения

$$z = \frac{352-317}{17.5} = 1.98.$$

Количество опытов, при котором данный результат нельзя считать промахом, равно 10 (приложение 3). Это число больше, чем $N=6$. Следовательно, отсчет $m_4 = 352$ г промахом и его нужно удалить из обрабатываемого ряда.

- Вычисляем среднее значение

$$\langle m \rangle = 310 \text{ г}$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение отсчетов

$$S_m = 4.6 \text{ г}$$

- Вычисляем случайную составляющую погрешности

$$S_{\langle m \rangle} = \frac{4.6}{\sqrt{5}} = 2.0 \text{ г}$$

$$\Delta_m = 2.8 \cdot 2 = 5.6 \text{ г}$$

- Вычисляем полную погрешность

абсолютную $\Delta m = 5.6 \approx 6$ г (т.к. $\Delta_m > 3 \cdot \Delta_a$),

относительную $\delta_m = \frac{6}{310} = 2\%$.

Новый ряд отсчетов массы $N=5$ $t_{95;5}=2.8$

№	m, г
1	315
2	313
3	305
4	306
5	313

- Результат прямого измерения массы представляем в виде:

$$m = 310 \pm 6 \text{ г} \quad \delta = 2\% \quad \alpha = 95\%$$

Обработка прямых измерений радиуса вращения

Инструментальная погрешность $\Delta_a = 0.5$ мм

Число отсчетов $N = 6$

Доверительная вероятность $\alpha = 95\%$

Коэффициент доверия $t_{95;6} = 2.6$

Отсчеты радиуса

№	R, мм
1	99
2	103
3	111
4	104
5	105
6	104

- Вычисляем среднее значение

$$\langle R \rangle = 104 \text{ ..}$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение

$$S_R = 3.9 \text{ мм}$$

- Аномальные отсчеты отсутствуют.
- Вычисляем случайную составляющую погрешности

$$S_{\langle R \rangle} = \frac{3.9}{\sqrt{6}} = 1.6 \text{ мм} \quad \Delta_R = 2.6 \cdot 1.6 = 4.2 \text{ мм}$$

- Вычисляем полную погрешность

абсолютную $\Delta R = 4.2 \approx 4$ мм (т.к. $\Delta_R > 3 \cdot \Delta_a$)

относительную $\delta_R = \frac{4}{104} = 4\%$

- После округлений результат прямого измерения массы запишем в виде:

$$R = 104 \pm 4 \text{ мм} \quad \delta = 4\% \quad \alpha = 95\%$$

Обработка прямых измерений скорости вращения

Инструментальная погрешность $\Delta_a = 0.5$ м/с

Число отсчетов $N = 6$

Доверительная вероятность $\alpha = 95\%$

Коэффициент доверия $t_{95;6} = 2.6$

Отсчеты скорости

№	V, м/с
1	30
2	30
3	30
4	29.5
5	28.5
6	31

- Вычисляем среднее значение

$$\langle v \rangle = 29.8 \text{ м/с}$$

- Вычисляем среднее квадратическое отклонение отсчетов

$$S_v = 0.82 \text{ м/с}$$

- Проверяем отсчеты на наличие промахов.

Аномальным отсчетом является отсчет №5. Вычисляем нормированное отклонение v_5 от среднего значения

$$z = \frac{|28.5 - 29.8|}{0.82} = 1.63.$$

Количество опытов, при котором данный результат нельзя считать промахом, равно 5. Это число не больше количества измерений $N=6$. Следовательно, отсчет $v_5 = 28.5$ м/с нельзя считать промахом.

- Вычисляем случайную составляющую погрешности

$$S_{\langle v \rangle} = \frac{0.82}{\sqrt{6}} = 0.33 \text{ м/с} \qquad \Delta_v = 2.6 \cdot 0.33 = 0.86 \text{ м/с}$$

- Вычисляем полную погрешность

абсолютную $\Delta v = \sqrt{0.86^2 + 0.5^2} = 1$ м/с относительную $\delta_v = \frac{1}{29.8} = 3\%$

- После округлений результат прямого измерения массы представляем как

$$v = 30 \pm 1\,\text{м/с} \quad \delta = 3\% \quad \alpha = 95\%$$

Обработка косвенных измерений центробежной силы

- Вычисляем среднее значение силы

$$\langle F \rangle = \frac{0.31 \cdot 30^2}{0.104} = 2683\,\text{Н} \approx 2.68\,\text{кН}$$

- Находим относительную погрешность по формулам таблицы 2.

$$\delta F = 2 + 4 + 2 \cdot 3 = 12\%$$

- Находим абсолютную погрешность

$$\Delta F = 2.68 \cdot 0.12 = 0.32\,\text{кН}$$

- После округлений результат косвенного измерения силы представляем в виде:

$F = 2.7 \pm 0.3$ кН ä = 12% á = 95%

Отсчеты силы

№	F, Н
1	2710
2	2210
3	1940
4	2490
5	2760
6	2680

Обработка прямых измерений центробежной силы

Инструментальная погрешность $\Delta_a = 10\,\text{Н}$

Число отсчетов $N = 6$

Доверительная вероятность $\alpha = 95\%$

Коэффициент доверия $t_{95;6} = 2.6$

- Вычисляем среднее значение $\langle F \rangle = 2465$ Н.
- Вычисляем среднее квадратическое отклонение отсчетов

$$S_F = 327\ \text{Н}.$$

- Проверяем отсчеты на наличие промахов.

Аномальным отсчетом является отсчет №3. Вычисляем нормированное отклонение v_3 от среднего значения

$$z = \frac{|1940 - 2465|}{327} = 1.61.$$

Количество опытов, при котором данный результат нельзя считать промахом, равно 5. Это число не больше количества измерений $N = 6$. Следовательно, отсчет $v_3 = 1940\,\text{Н}$ нельзя считать промахом.

- Вычисляем случайную составляющую погрешности

$$S_{\langle F \rangle} = \frac{327}{\sqrt{6}} = 133\,\text{Н}$$

$$\Delta_F = 2.6 \cdot 133 = 346\ \text{Н}$$

- Полная погрешность

абсолютная $\Delta F = 346\,\text{Н} \approx 0.3\,\text{кН}$

относительная $\delta_F = \dfrac{346}{2465} = 14\%$.

- После округлений результат прямого измерения массы представляем как

$$F = 2.5 \pm 0.3\,\text{кН} \quad \delta = 14\% \quad \alpha = 95\%$$

На рис.8 видно, что доверительные интервалы прямых и косвенных измерений центробежной силы перекрываются. Следовательно, экспериментальные данные с вероятностью 95% не противоречат формуле

$$F = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

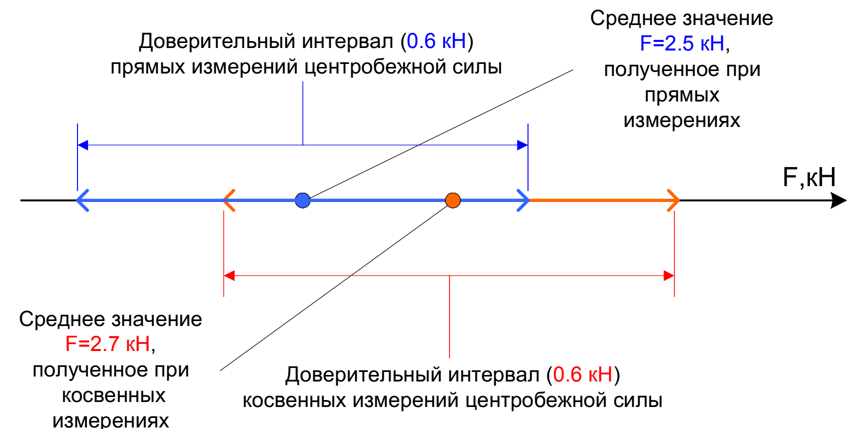


Рис.8. Результаты обработки экспериментальных данных

6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СЕРИИ НАБЛЮДЕНИЙ

6.1. Определения основных понятий

Допустим, что проведено N наблюдений некоторой физической величины. Из-за случайных ошибок отдельные отсчеты $x_1, x_2, ..., x_N$ неодинаковы. Будем считать, что интересующее нас событие произошло, если отсчет ξ попал в заданный интервал $[a,b)$.

Вероятность P события попадания случайной величины в некоторый интервал $[a,b)$ называется предел, к которому стремится отношение числа m наступления этого события к числу N всех наблюдений, если число наблюдений стремится к бесконечности:

$$P(a \le \xi < b) = \lim_{N\to\infty} \frac{m}{N}.$$

В теории вероятностей математическая характеристика случайных величин основывается на понятии ***распределение вероятности*** $F(x)$, которое является функцией числового аргумента x и определяет вероятность того, что значение ξ некоторой случайной величины лежит в интервале $[-\infty, x)$:

$$F(x) = P(-\infty \le \xi < x).$$

$$F(-\infty) = 0; \quad F(\infty) = 1; \quad F(a) \le F(b) \text{ \%p› } a \le b.$$

Распределение вероятностей позволяет найти вероятность того, что $\xi \subset [a,b)$

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a).$$

В частности, вероятность того, что значение ξ непрерывной случайной величины принадлежит бесконечно малому интервалу $[x, x+dx)$ можно выразить как

$$P(x \le \xi < x + dx) = f(x)dx.$$

Функция $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ — называется ***плотностью вероятности***.

Основное свойство плотности вероятности состоит в том, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Серию из N отсчетов измеряемой величины можно наглядно представить, построив ***гистограмму*** — диаграмму, которая показывает, как часто встречаются те или иные отсчеты. Гистограмму строят следующим образом. Весь диапазон наблюдаемых значений разбивают на K равных интервалов (***интервалов классификации***) длиной Δx и подсчитывают, сколько отсчетов попало в каждый интервал. По оси абсцисс откладывают границы интервалов, а по оси ординат - относительную частоту попадания отсчетов в интервалы, деленную на его длину, т.е. величину $H_k = \dfrac{m_k}{N\Delta x}$, где m_k — число отсчетов, попавших в k-й интервал. На интервалах, как на основаниях строят прямоугольники высотой H_k (рис.1). При $N \to \infty$ площадь каждого прямоугольника будет стремиться к вероятности попадания отсчета в соответствующий интервал классификации. Если одновременно устремить длину интервала к нулю ($\Delta x \to 0$, но так, что в любой бесконечно малый интервал попадает бесконечно много отсчетов), то гистограмма превратится в график плотности вероятности.

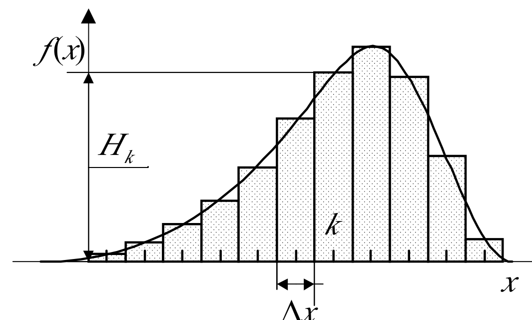


Рис. 9. Гистограмма

Плотность вероятности характеризуется набором параметров — моментов распределения, два из которых в теории погрешностей имеют главное значение.

Математическое ожидание μ — это число, в окрестности которого концентрируются значения случайной величины:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсия σ^2 — это число, которое характеризует степень рассеяния значений случайной величины вокруг ее математического ожидания:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

Величина σ называется ***средним*** (***стандартным***) ***квадратическим отклонением***.

6.2. Нормальное распределение

В основе теории погрешностей лежат три предположения, подтвержденные опытом:

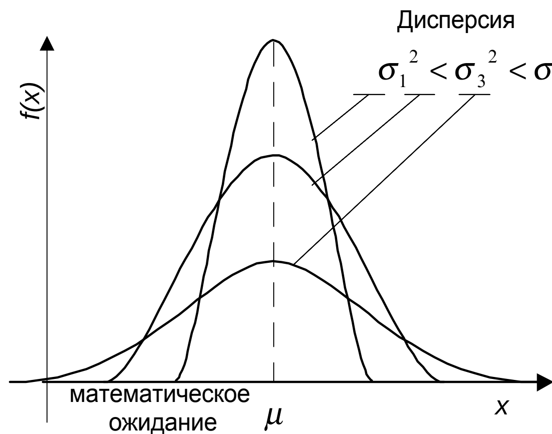


Рис. 10. Плотность вероятности нормального распределения

1. Отклонения наблюдаемых значений от истинного значения принимают непрерывный ряд.
2. Погрешности, имеющие одинаковые абсолютные значения, но разные знаки встречаются одинаково часто.
3. Чем больше значение погрешности, тем реже оно встречается.

Из этих предположений следует, что распределение вероятности отсчетов измеряемой величины подчиняется, так называемому, нормальному распределению (закону распределения Гаусса), плотность вероятности которого

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\mu = const, \sigma = const.$$

Можно показать, что μ — это математическое ожидание, а σ^2 — дисперсия. Вид плотности распределения для различных значений дисперсии показан на рис.10. Приведем без доказательства важные свойства нормального распределения.

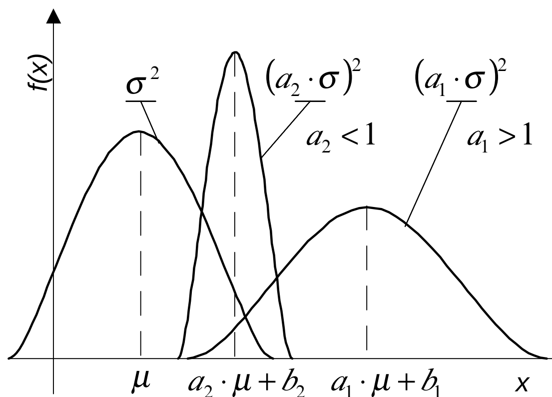


Рис. 11. Изменение плотности вероятности при линейном преобразовании нормально распределенной случайной величины

Если ξ имеет нормальное распределение $f(x|\mu,\sigma)$ (математическое ожиданием μ и дисперсия σ^2), то $\eta = a\xi + b$, (a и b детерминированные величины) имеет нормальное распределение (рис.11)

$$f(x|a\mu + b, a\sigma).$$

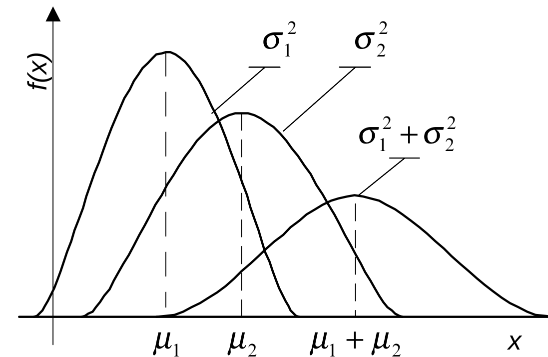


Рис. 12. Изменение плотности вероятности при сложении нормально распределенных случайных величин

Если ξ_1 и ξ_2 нормально распределены с плотностями вероятности

$f(x|\mu_1,\sigma_1)$, $f(x|\mu_2,\sigma_2)$,

то $\eta = \xi_1 + \xi_2$ имеет нормальное распределение с плотностью (рис.12)

$$f(x|\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

Связь плотности распределения и распределения вероятности показана на рис.13., а его вид — на рис.14.

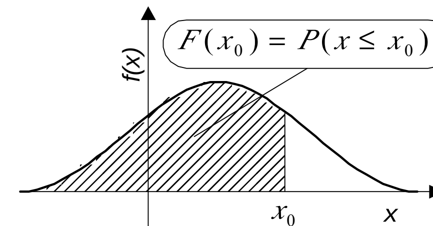


Рис. 13. Связь распределения с его плотностью

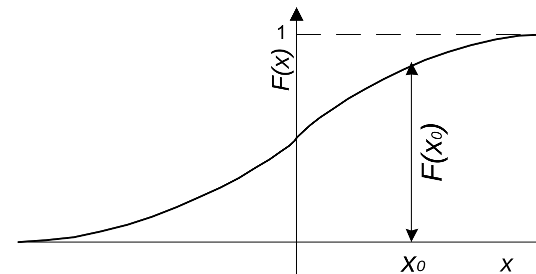


Рис. 14. Нормальное распределение

7. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ НА ОСНОВЕ ЗАКОНА ГУАССА

7.1. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии.

Пусть истинное значение измеряемой величины - X, а $x_1, x_2, \ldots, x_N$ - ряд её отсчетов. Пусть наблюдаемые значения имеют нормальное распределение с математическим ожиданием μ, совпадающим с истинным значением, и некоторой дисперсией σ^2. Вероятность того, что все отсчеты попадут в бесконечно малый интервал $[x-\frac{\delta}{2}, x+\frac{\delta}{2})$ по теореме умножения вероятностей равна произведению вероятностей того, что каждый отсчет попадет в этот интервал:

$$P(X,\sigma) = \prod_{n=1}^{N}[f(x_n)\delta] = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^N}\exp\left[-\sum\left(x_n - X\right)^2 \Big/ \left(2\sigma^2\right)\right]\delta^N$$

Чем больше P, тем с большей вероятность наблюдаемые значения группируются вокруг истинного значения. Функция $\frac{P}{\delta^N}$ с аргументами X, σ называется ***правдоподобием эксперимента.***

Найдем, при какой связи X, σ^2 с отсчетами $x_1, x_2, \ldots, x_N$ правдоподобие максимально. При исследовании функции на экстремум удобно использовать не саму функцию, а ее логарифм.

$$L = \ln(P/\delta^N) = -(N/2)\ln(2\pi) - N\ln(\sigma) - \sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right)^2 \Big/ (2\sigma^2).$$

При фиксированном значении σ максимум L достигается при

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad \sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right) = 0.$$

Из последнего уравнения находим

$$X = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n}{N} = \langle x \rangle.$$

Следовательно, ***выборочное среднее значение*** **есть максимально правдоподобная оценка *истинного значения* измеряемой величины.**

При фиксированном аргументе X значение σ, дающее максимум L, можно найти из уравнения:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0, \qquad \text{или} \qquad -\frac{N}{\sigma} + \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right)^2}{\sigma^3} = 0.$$

Тогда

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right)^2}{N}}.$$

Следовательно, **максимально правдоподобная оценка *стандартного квадратического отклонения* равна выборочному среднему квадратическому отклонению отсчетов от *истинного значения*.**

Так как в процессе измерений истинное значение неизвестно, то полученная формула не пригодна для расчета погрешности. Выразим σ через $\langle x \rangle$:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right)^2}{N} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \langle x \rangle + \langle x \rangle - X\right)^2}{N} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \langle x \rangle\right)^2}{N} +$$

$$+ 2(\langle x \rangle - X)\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \langle x \rangle\right)}{N} + \left(\langle x \rangle - X\right)^2.$$

В этом выражении второе слагаемое равно нулю. Рассмотрим третье слагаемое:

$$\left(\langle x \rangle - X\right)^2 = \frac{\left(\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right)\right)^2}{N^2} =$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right)^2}{N^2} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left(x_n - X\right)\left(x_m - X\right).$$

Второе слагаемое полученного выражения равно нулю при $N \to \infty$, т.к. отклонения наблюдаемых значений от истинного встречаются с разными знаками одинаково часто. Следовательно

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - X\right)^2}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - <x>\right)^2}{(N-1)}.$$

Величина $$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - <x>\right)^2}{N-1}}$$

называется ***выборочным средним квадратическим отклонением одиночного наблюдения*, которое в пределе дает максимально правдоподобную оценку *стандартного квадратического отклонения:***

$$\sigma = \lim_{N\to\infty} S_x .$$

При конечном значении N $\sigma \approx S_x$.

Выборочное среднее является суммой N нормально распределенных случайных величин, имеющих одинаковую дисперсию. Оно представляет случайную величину с дисперсией в N раз меньшей, чем дисперсия слагаемых. Поэтому ***выборочное среднее квадратическое отклонение среднего*** $S_{<x>}$ в $\sqrt{N}$ раз меньше чем S_x т.е.

$$S_{<x>} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}.$$

7.2. Взвешенное среднее значение

Если получены две независимые точечные оценки $<x>_1$ и $<x>_2$ одного и того же истинного значения (математического ожидания) с разными дисперсиями σ_1 и , σ_2 то наилучшую оценку $<x>$ общего математического ожидания можно найти с помощью принципа максимального правдоподобия:

$$L = -\ln(2\pi) - \ln\left(\sigma_1\right) - \ln\left(\sigma_2\right) - \frac{\left(<x>_1 - X\right)^2}{2\,\sigma_1^2} - \frac{\left(<x>_2 - X\right)^2}{2\sigma_2^2}.$$

Наилучшую оценку находим из уравнения $\frac{\partial L}{\partial X} = 0$, т.е.

$$\frac{\left(<x>_1 - X\right)}{\sigma_1^2} + \frac{\left(<x>_2 - X\right)}{\sigma_2^2} = 0$$

Тогда

$$<x> = \frac{\frac{<x>_1}{\sigma_1^2} + \frac{<x>_2}{\sigma_2^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}.$$

Дисперсия этой оценки $$\sigma^2 = \left(\frac{\partial <x>}{\partial <x>_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial <x>}{\partial <x>_2}\right)^2 \cdot \sigma_2^2$$

или

$$\sigma^2 = \left(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2\right)^{-1}.$$

7.3. Доверительный интервал для математического ожидания

Как было показано, наилучшей оценкой математического ожидания μ является выборочное среднее значение $<x>$, которое представляет собой случайную нормально распределенную величину с плотностью вероятности $f(x|\mu,\ \sigma/\sqrt{N})$. ***Доверительным интервалом*** для μ называется интервал $[\mu - \Delta x,\ \mu + \Delta x]$, в который с вероятностью



Рис. 15.

$$\alpha = \int_{\mu-\Delta x}^{\mu+\Delta x} f(x|\mu,\sigma/\sqrt{N})dx$$

попадает μ. Вероятность α называют ***доверительной вероятностью***. По заданному значению α всегда можно рассчитать ширину $2\Delta x$ доверительного интервала, если известны значения μ и σ (рис.15).

При обработке результатов измерений значения μ и σ неизвестны, а могут быть вычислены лишь их оценки $<x>$ и $S_{<x>}$. Поэтому задачу построения доверительного интервала необходимо сформулировать иначе. Пусть задана доверительная вероятность α, с которой доверительный интервал шириной $2\Delta x$ покрывает неизвестное математическое ожидание μ. В этом случае границы доверительного интервала являются случайными. Для их определения необходимо из функции распределения ис-

ключить неизвестный параметр μ. Используем линейное преобразование: $\tau = \frac{< x > - \mu}{\sigma_{<x>}}$ случайной величины $< x >$, где $\sigma_{<x>} = \sigma / \sqrt{N}$. Случайная величина τ распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда

$$\alpha = \int_{-\Delta x/\sigma_{<x>}}^{\Delta x/\sigma_{<x>}} f(t|0,1)\,dt.$$

Во многих случаях обработки результатов измерений дисперсия σ, следовательно, и $\sigma_{<x>}$ так же неизвестны. Поэтому при обработке используют их оценки S_x, $S_{<x>}$ и $\mathrm{T} = \frac{< x > - \mu}{S_{<x>}}$. В результате случайная величина T будет распределена не по нормальному закону, а по, так называемому, закону Стьюдента с плотностью распределения $f(x|0,1,N)$, зависящей от числа N измерений величины x. В этом случае доверительная вероятность и ширина доверительного интервала связаны соотношением

$$\alpha = \int_{-\Delta x / S_{<x>}}^{\Delta x / S_{<x>}} f(t|0,1,N)\,dt.$$

Решение последнего уравнения относительно Δx представляют в виде:

$$\Delta x = t(\alpha, N) \cdot S_{<x>},$$

где функцию от доверительной вероятности и числа измерений $t(\alpha, N)$ называют коэффициентом доверия (коэффициентом Стьюдента). Значения $t(\alpha, N)$ в зависимости от α и N приведены в приложении 1. При $N \to \infty$ (практически при $N > 20$) распределение Стьюдента совпадает с нормальным распределением. В этом случае коэффициент доверия можно определить по таблицам распределения Гаусса.

8. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

8.1. Нормальное распределение результатов измерений некоррелированных величин.

Пусть $u = f(x, y)$— функциональная зависимость между измеряемой величиной u и величинами x, y, значения которых найдены прямыми измерениями. Пусть величины x, y распределены по нормальному закону, имеют математические ожидания a_x, a_y и дисперсии σ_x^2, σ_y^2 и статистически не связаны между собой. Разложим функцию $f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a_x, a_y:

$$f(x,y) \approx f(a_x, a_y) + (\partial f / \partial x) \cdot (x - a_x) + (\partial f / \partial y) \cdot (y - a_y),$$

частные производные вычисляются в точке a_x, a_y. Полученное выражение представляет собой сумму трех слагаемых. Первое из них — детерминированная величина. Два других — произведение детерминированной величины на разность случайной нормально распределенной величины и детерминированной. Согласно свойствам нормального распределения результат косвенных измерений u будет иметь нормальное распределение с математическим ожиданием

$$< u > = f(a_x, a_y)$$

и дисперсией

$$\sigma_u^2 = (\partial f / \partial x)^2 \sigma_x^2 \cdot + (\partial f / \partial y)^2 \cdot \sigma_y^2.$$

Следовательно, при нормальном законе распределения аргументов косвенно измеряемой функции справедливо правило квадратичного суммирования погрешностей

$$\Delta u = \sqrt{(\Delta_x)^2 + (\Delta_y)^2 + \ldots}.$$

8.2. Произвольное распределение результатов измерений.

Теперь не будем предполагать, что ошибки измерений аргументов нормально распределены и статистически не связаны. Однако будем считать попрежнему, что оценкой истинного значения является среднее арифметическое, а мерой погрешности — их дисперсия. Тогда из разложения функции $f(x, y)$ в ряд Тейлора находим, как и ранее,

$$< u > = < f(x, y) > = f(a_x, a_y).$$

Дисперсия

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left((\partial f/\partial x)\cdot(x-a_x)+(\partial f/\partial y)\cdot(y-a_y)\right)^2 =$$

$$= (\partial f/\partial x)^2\cdot\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{N}(x-a_x)^2 + (\partial f/\partial y)^2\cdot\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{N}(y-a_y)^2 +$$

$$+2\cdot(\partial f/\partial x)\cdot(\partial f/\partial y)\cdot\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{N}(x-a_x)\cdot(y-a_y).$$

Учитывая определение дисперсии аргументов x, y, получаем

$$\sigma_u^2 = (\partial f/\partial x)^2\cdot\sigma_x^2 + (\partial f/\partial y)^2\cdot\sigma_y^2 + 2\cdot(\partial f/\partial x)\cdot(\partial f/\partial y)\cdot\sigma_{xy},$$

где величина

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\cdot\sum_{n=1}^{N}(x-a_x)\cdot(y-a_y).$$

называется ковариацией (корреляционным моментом) и характеризует степень статистической связи аргументов x, y.

Если статистическая связь отсутствует, т.е. погрешности величины x, y не зависимы (не коррелированны), то $\sigma_{xy} = 0$ и

$$\sigma_u^2 = (\partial f/\partial x)^2\sigma_x^2 \cdot + (\partial f/\partial y)^2\cdot\sigma_y^2,$$

т.е. по-прежнему справедливо правило квадратического суммирования погрешностей как и в случае нормального распределения.

Если такая зависимость погрешностей имеет место, то с учетом неравенства Шварца $|\sigma_{xy}| \le \sigma_x\cdot\sigma_y$, получаем

$$\sigma_u^2 \le (\partial f/\partial x)^2\cdot\sigma_x^2 + (\partial f/\partial y)^2\cdot\sigma_y^2 + 2\cdot|(\partial f/\partial x)\cdot(\partial f/\partial y)|\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y =$$

$$= \left[(\partial f/\partial x)\cdot\sigma_x + (\partial f/\partial y)\cdot\sigma_y\right]^2,$$

Следовательно, при наличии корреляции между погрешностями аргументов погрешности суммируются по модулю, а не квадратично, т.е.

$$\Delta u = |\Delta_x| + |\Delta_y| + \ldots.$$

Это выражение дает верхний предел для погрешностей с произвольным законом распределения как при наличии, так и при отсутствии их статистической связи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Коэффициент доверия (Стьюдента)

Число изм.	**Надежность**					
N	**0.5**	**0.9**	**0.95**	**0.98**	**0.99**	**0.999**
2	1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	0.82	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	0.77	2.4	3.2	4.5	5.8	12.9
5	0.74	2.1	2.8	3.7	4.6	8.6
6	0.73	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	0.72	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	0.71	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	0.71	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	0.70	1.8	2.3	2.8	3.2	4.8
20	0.69	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
>20	0.67	1.6	2.0	2.5	2.8	3.3

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Формулы погрешностей косвенных измерений

Функциональная связь	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$u = x + y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\delta u = (\Delta x + \Delta y)/(x + y)$
$u = x - y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\delta u = (\Delta x + \Delta y)/(x - y)$
$u = xy$	$\Delta u = y\Delta x + x\Delta y$	$\delta u = \delta x + \delta y$
$u = x/y$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = \delta x + \delta y$
$u = x^n$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = n\delta x$
$u = \sqrt[n]{x}$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = \delta x/n$
$u = e^x$	$\Delta u = u\Delta x$	$\delta u = \Delta x$
$u = \ln(x)$	$\Delta u = \delta x$	$\delta u = \delta x/u$
$u = \sin(x)$	$\Delta u = \cos(x)\Delta x$	$\delta u = ctg(x)\Delta x$
$u = \cos(x)$	$\Delta u = \sin(x)\Delta x$	$\delta u = tg(x)\Delta x$
$u = tg(x)$	$\Delta u = \Delta x/\cos^2(x)$	$\delta u = 2\Delta x/\sin(2x)$
$u = ctg(x)$	$\Delta u = \Delta x/\sin^2(x)$	$\delta u = 2\Delta x/\sin(2x)$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Отбор промахов по критерию Шовене

Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M
1.00	2	1.40	3	1.80	7	2.20	18	2.60	54
1.02	2	1.42	3	1.82	7	2.22	19	2.62	57
1.04	2	1.44	3	1.84	8	2.24	20	2.64	60
1.06	2	1.46	3	1.86	8	2.26	21	2.66	64
1.08	2	1.48	4	1.88	8	2.28	22	2.68	68
1.10	2	1.50	4	1.90	9	2.30	23	2.70	72
1.12	2	1.52	4	1.92	9	2.32	25	2.72	77
1.14	2	1.54	4	1.94	10	2.34	26	2.74	81
1.16	2	1.56	4	1.96	10	2.36	27	2.76	87
1.18	2	1.58	4	1.98	10	2.38	29	2.78	92
1.20	2	1.60	5	2.00	11	2.40	30	2.80	98
1.22	2	1.62	5	2.02	12	2.42	32	2.82	104
1.24	2	1.64	5	2.04	12	2.44	34	2.84	111
1.26	2	1.66	5	2.06	13	2.46	36	2.86	118
1.28	2	1.68	5	2.08	13	2.48	38	2.88	126
1.30	3	1.70	6	2.10	14	2.50	40	2.90	134
1.32	3	1.72	6	2.12	15	2.52	43	2.92	143
1.34	3	1.74	6	2.14	16	2.54	45	2.94	152
1.36	3	1.76	6	2.16	16	2.56	48	2.96	163
1.38	3	1.78	7	2.18	17	2.58	51	2.98	173

$Z=\dfrac{|x-\langle x\rangle|}{S_x}$ - относительное отклонение случайной величины x от её среднего значения в единицах среднеквадратического отклонения,

M - число ожидаемых измерений, начиная с которого отклонение Z не может считаться промахом.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Вероятность того, что результаты N измерений двух некоррелированных случайных величин дадут коэффициент корреляции больше граничного ($r>r_0$)

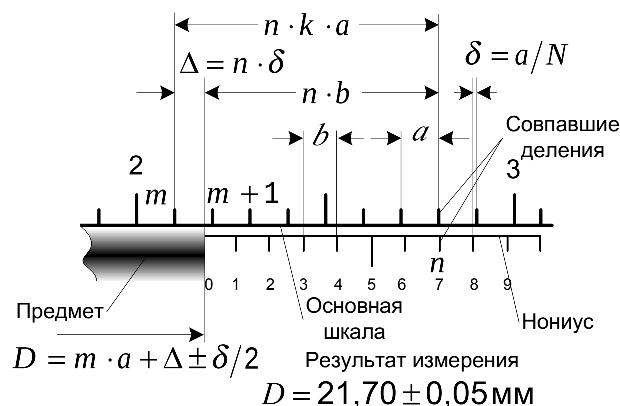
Число изм. N	Граничное значение r_0 коэффициента корреляции r									
	0.1	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**0.99**
3	94	87	81	74	67	59	51	41	29	9
4	90	80	70	60	50	40	30	20	10	1
5	87	75	62	50	39	28	19	10	4	0
6	85	70	56	43	31	21	12	6	1	0
7	83	67	51	37	25	15	8	3	1	0
8	81	63	47	33	21	12	5	2	0	0
9	80	61	43	29	17	9	4	1	0	0
10	78	58	40	25	14	7	2	1	0	0
11	77	56	37	22	12	5	2	0	0	0
12	76	53	34	20	10	4	1	0	0	0
13	75	51	32	18	8	3	1	0	0	0
14	73	49	30	16	7	2	1	0	0	0
15	72	47	28	14	6	2	0	0	0	0
16	71	46	26	12	5	1	0	0	0	0
17	70	44	24	11	4	1	0	0	0	0
18	69	43	23	10	3	1	0	0	0	0
19	68	41	21	9	3	1	0	0	0	0
20	67	40	20	8	2	1	0	0	0	0
25	63	34	15	5	1	0	0	0	0	0
30	60	29	11	3	1	0	0	0	0	0
35	57	25	8	2	0	0	0	0	0	0
40	54	22	6	1	0	0	0	0	0	0
50	49	16	3	0	0	0	0	0	0	0

ПРИЛОЖЕНИЕ 5.

Нониусы

Нониусом называется специальная шкала, дополняющая масштаб обычной шкалы и позволяющая повысить точность измерений в 10-20 раз.

Нониусы бывают линейные (например, штангенциркуль) и круговые (например, микрометр). Ниже рассмотрим принцип построения линейного нониуса, который представляет собой небольшую линейку, скользящую вдоль основной шкалы. Интервал b одного деления нониуса меньше k интервалов деления a основной шкалы на величину $\delta = k \cdot a - b$. Если принять $\delta = a/N$, где N — целое, то длина N делений нониуса равна длине $N \cdot k - 1$ делений основной шкалы, т.е. $N \cdot b = (N \cdot k - 1) \cdot a$. Пусть длина D измеряемого предмета такая, что $m \cdot a < D < (m+1) \cdot a$ (см. рисунок). Если $n-$ое деление нониуса совпадает с некоторым делением основной шкалы, то длина предмета $D = m \cdot a + n \cdot \delta = \left(m + \frac{n}{N}\right) \cdot a$. Следовательно, минимальное отличие длины предмета от целого числа делений основной шкалы, которое можно измерить по нониусу, равно δ и составляет $N-$ю долю цены деления основной шкалы. Значение δ указывается как цена деления на измерительном приборе.



ЛИТЕРАТУРА

1. Брянский Л.Н., Дойников А.С. Краткий справочник метролога. — М.: Издательство стандартов, 1991.
2. Кушнир Ф.В., Савенко В.Г. Электрорадиоизмерения. — Л.: Энергия, 1975.
3. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. — М.: Мир, 1985.
4. Сквайрс Дж. Практическая физика. — М.: Мир, 1971.
5. Худсон Д. Статистика для физиков. — М.: Мир, 1970.
6. Кунце Х.-И. Методы физических измерений. — М.: Мир, 1989.
7. Тойберт П. Оценка точности результатов измерений. — М.: Энергоатомиздат, 1988.
8. Каленко С.Г., Соломахо Г.И. Практикум по физике. Механика. — М.: Высш. шк., 1990.
9. Кортнев А.В., Рублев Ю.В., Куценко А.Н. Практикум по физике. — М.: Высш. шк., 1965.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.

Задание 1

1. Даны отсчеты значений постоянного тока I и активного сопротивления R, через которое протекает этот ток, снятые со шкал приборов известного класса точности. Получить результаты прямых измерений тока и сопротивления. Обеспечить надежность результатов измерений α.

2. С помощью косвенных измерений найти значение мощности, рассеянной на сопротивлении и оценить его погрешность.

3. Задано предполагаемое теоретическое значение мощности P_{0T}. Сделать вывод о согласии результатов измерений мощности и ее теоретического значения.

4. Ранее получено экспериментальное значение мощности $P_{0Э}$. Сделать вывод о согласии результатов данных косвенных измерений мощности и её предыдущего экспериментального значения.

5. Объединить результаты измерения мощности в данном опыте с результатом её предыдущего измерения $P_{0Э}$.

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5		Вариант 6	
P_{0T}, мВт	$P_{0Э}$, мВт	P_{0T}, Вт	$P_{0Э}$, Вт	P_{0T}, Вт	$P_{0Э}$, Вт	P_{0T}, мВт	$P_{0Э}$, мВт	P_{0T}, мВт	$P_{0Э}$, мВт	P_{0T}, мВт	$P_{0Э}$, мВт
450	450 ±80	450	430 ±40	450	460 ±50	450	420 ±50	1.8	1.7 ±0.3	1.8	1.6 ±0.3
Надежность результатов измерений α%											
95		90		90		95		98		98	
I, мА	R, Ом	I, А	R, Ом	I, А	R, Ом	I, мА	R, Ом	I, мкА	R, кОм	I, мкА	R, кОм
145	*21.5*	*14.1*	*1.55*	*14.5*	*2.05*	*150*	*20.0*	*313*	*21.5*	*311*	*18.0*
140	*21.5*	*14.4*	*1.65*	*14.2*	*4*	*150*	*22.5*	*305*	*20.0*	*342*	*12.0*
145	*21.5*	*15.7*	*2.05*	*14.8*	*1.90*	*155*	*19.5*	*310*	*18.5*	*284*	*17.0*
105	*21.0*	*14.7*	*1.90*	*16.2*	*2.50*	*155*	*17.0*	*201*	*18.5*	*313*	*20.0*
130	*18.5*	*15.1*	*1.80*	*15.2*	*1.95*	*155*	*17.5*	*273*	*18.5*	*337*	*20.5*
150	*20.0*	*16.5*	*2.55*	*15.6*	*1.80*	*140*	*18.0*	*274*	*20.5*	*256*	*22.5*
150	*19.0*	*14.2*	*2.10*	*15.9*	*2.10*	*130*	*19.0*	*290*	*19.5*	*331*	*18.5*
155	*21.0*	*15.0*	*2.05*	*15.0*	*1.95*	*165*	*20.0*	*268*	*22.0*	*275*	*19.5*
175	*19.5*	*16.3*	*2.00*	*15.3*	*1.80*	*105*	*19.0*	*232*	*18.0*	*311*	*21.0*
160	*19.0*	*16.1*	*1.90*	*15.2*	*1.85*	*135*	*19.5*	*331*	*20.5*	*275*	*20.5*
Амперметра	Омметра	Амперметра	Омметра	Амперметра	Омметра	Амперметра	Омметра	Амперметра	Омметра	Амперметра	Омметра
Класс точности											
2.5	1	0.5	1	0.5	1	2.5	1	0.5	1	0.5	1
Предел шкалы											
200, мА	100, Ом	20, А	5, Ом	20, А	5, Ом	200, мА	100, Ом	400, мкА	50, кОм	400, А	50, кОм

Задание 2.

1. Даны результаты прямых измерений некоторых физических величин и уравнение их связи с другой физической величиной.

2. Найти значение этой величины и оценить его погрешность. Погрешность косвенных измерений определить двумя способами: 1) с помощью вычисления частных производных измеряемой величины по ее аргументам; 2) с помощью вычисления конечных приращений.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$a = (2.3 \pm 0.2)$ м/с^2 $t = (2.31 \pm 0.05)$ с $S = \dfrac{a \cdot t^2}{2}$	$I_0 = (120 \pm 10)$ Вт/м^2 $\varphi = (25 \pm 1)^o$ $I = I_0 \cdot \cos^2 \varphi$	$R_1 = (23 \pm 5)$ Ом $R_2 = (12 \pm 3)$ Ом $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$
Вариант 4	**Вариант 5**	**Вариант 6**
$L = (10 \pm 1)$ мГ $C = (100 \pm 20)$ пФ $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$	$m = (12 \pm 3)$ кг $v = (52.31 \pm 0.05)$ Гц $R = (201 \pm 5)$ мм $F = m \cdot (2 \cdot \pi \cdot v)^2 \cdot R$	$F = (12 \pm 3)$ кН $v = (2.31 \pm 0.05)$ м/с $R = (201 \pm 5)$ мм $m = \dfrac{F \cdot R}{v^2}$
Вариант 7	**Вариант 8**	**Вариант 9**
$R = 8.3144$ $\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ $T = (301 \pm 5)$ К $V_1 = (50 \pm 1)$ л $V_2 = (10 \pm 1)$ л $A = R \cdot T \cdot \ln(V_2/V_2)$	$p_2 = (23 \pm 5)$ Ом $V_1 = (8.1 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ м^3 $V_2 = (9.7 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ м^3 $\gamma = 1.4 \pm 0.2$ $p_1 = p_2 \cdot (V_1/V_2)^\gamma$	$L = (10 \pm 1)$ мГ $C = (100 \pm 20)$ пФ $U = (1.2 \pm 0.5)$ В $I = U \cdot \sqrt{\dfrac{C}{L}}$
Вариант 10	**Вариант 11**	**Вариант 12**
$m = (34. \pm 8)$ кг $v = (32.31 \pm 0.05)$ с$^{-1}$ $R = (0.201 \pm 0.005)$ м $F = m \cdot (2\pi \cdot v)^2 \cdot R$	$L = (10 \pm 1)$ мГ $C = (100 \pm 20)$ пФ $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$	$R_1 = (2.3 \pm 0.2)$ МОм $R_2 = (1.2 \pm 0.3)$ МÎì $R = \dfrac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)}$

Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
$R = 8.3144 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ $g = 9.80665 \text{м}/\text{с}^2$ $\mu = 0.018 \text{кг}/\text{моль}$ $T = (295 \pm 5)\text{К}$ $h = (2010 \pm 50)\text{м}$ $p = \exp(-\frac{\mu g h}{RT})$	$\mu = 0.032 \text{кг/моль}$ $R = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ $p = (41.2 \pm 0.5)\text{МПа}$ $V = (10.0 \pm 0.1)\text{л}$ $T = (300 \pm 20)\text{К}$ $m = \frac{\mu \cdot p \cdot V}{R \cdot T}$	$R_1 = (10 \pm 1)\text{Ом}$ $R_2 = (50 \pm 10)\text{Ом}$ $t = (0.010 \pm 0.005)\text{с}$ $L = (0.34 \pm 0.02)\text{Г}$ $I_1 = (1.2 \pm 0.2)\text{А}$ $I = I_1 \cdot e^{(R_1 + R_2) \cdot \frac{t}{L}}$
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
$L = (1.2 \pm 0.3)\text{мГ}$ $R = (0.12 \pm 0.05)\text{кОм}$ $E = (1.2 \pm 0.5)\text{В}$ $\omega = (1.3 \pm 0.4) \cdot 10^5 \text{рад}/\text{с}$ $I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}}$	$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Г}}{\text{м}}$ $B = (4.2 \pm 0.1)\text{мТ}$ $a = (1.00 \pm 0.01)\text{м}$ $b = (3.2 \pm 0.1)\text{мм}$ $J = \frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{a + b}{a}$	$C = (12 \pm 1.2)\text{нФ}$ $R = (0.12 \pm 0.02)\text{кОм}$ $E = (1.2 \pm 0.5)\text{В}$ $\omega = (1.31 \pm 0.04) \cdot 10^5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ $I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega \cdot C})^2}}$
Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21
$R_1 = (5.2 \pm 0.1)\text{Ом}$ $R_2 = (3.0 \pm 10)\text{Ом}$ $t = (0.010 \pm 0.005)\text{с}$ $L = (0.34 \pm 0.02)\text{Г}$ $I_1 = (1.2 \pm 0.2)\text{А}$ $I = I_1 \cdot e^{(R_1 + R_2) \cdot \frac{t}{L}}$	$L = (110 \pm 10)\text{мГ}$ $C = (10 \pm 2)\text{пФ}$ $U = (12.3 \pm 0.5)\text{В}$ $I = U \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$	$\mu_0 = 0.074 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ $R = 8.31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ $p = (3.56 \pm 0.02)\text{МПа}$ $\rho = (714 \pm 2) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ $T = (467 \pm 8)\text{К}$ $m = \frac{8 \cdot \mu_0 \cdot p}{3 \cdot \rho \cdot R \cdot T}$

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Стр.

1. ВИДЫ ИЗМЕРЕНИЙ.
КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ………………………. 3
2. ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ………………………… 7
2.1. Инструментальная погрешность……………………………………. 7
2.2. Случайная погрешность……………………………………………… 7
2.3. Промахи………………………………………………………………. 11
3. ОБРАБОТКА КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ…………………… 13
4. ПРАВИЛА ОКРУГЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЧИСЕЛ…… 15
5. ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ….. 17
5.1. Обработка прямых измерений………………………………………. 17
5.2. Объединение результатов прямых измерений………………………18
5.3. Обработка результатов косвенных измерений……………………... 19
5.4. Обработка результатов косвенных измерений
(сравнение методов расчета)………………………………………... 22
5.5. Обработка результатов косвенных измерений
(анализ статистической связи погрешностей)……………………... 25
5. 6. Экспериментальная проверка закона инерции……………………..29
6. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СЕРИИ НАБЛЮДЕНИЙ…35
6.1. Определения основных понятий……………………………………..35
6.2. Нормальное распределение…………………………………………….. 37
7. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ
НА ОСНОВЕ ЗАКОНА ГУАССА………………………………… 39
7.1. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии……….39
7.2. Взвешенное среднее значение………………………………………. 41
7.3. Доверительный интервал для математического ожидания…………42
8. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ КОСВЕННЫХ
ИЗМЕРЕНИЯХ…………………………………………………… 44
8.1. Нормальное распределение результатов измерений
некоррелированных величин……………………………………... 44
8.2. Произвольное распределение результатов измерений……………...44
9. ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Коэффициент доверия (Стьюдента)………… 46
10. ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Формулы погрешностей косвенных
измерений……………………………………... 46
11. ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Отбор промахов по критерию Шовене …….. 47
12. ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Вероятность коэффициентов корреляции……48
13. ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Нониусы………………………………………. 49
14. ЛИТЕРАТУРА…………………………………………………………. 50
15. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ……………………………………... 51